★秘密·2021年9月23日17：00前

重庆市2021-2022学年（上）9月月度质量检测

**高三数学**

2021.09

注意事项：

1.答题前，考生务必用黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、座位号在答题卡上填写清楚；

2.每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，在试卷上作答无效；

3.考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回；

4.全卷共6页，满分150分，考试时间120分钟。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合，，，则*A*中元素的个数为

A. 9 B. 10 C. 12 D. 13

1. 若复数在复平面内对应的点在虚轴上．则

A. 1 B. 0 C. D.

1. 已知直线，平面，，那么“”是“”

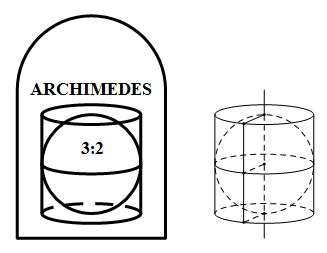
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件  
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

1. 已知向量，，若，则的值为

A. B. C. 6 D. 15

1. 已知抛物线*C*：的焦点为*F*，经过点*F*且倾斜角为的直线与抛物线交于*A*，*B*两点点*A*在第一象限，与抛物线的准线交于点*D*，若，则下列说法正确的是

A. B. *B*为*DF*中点 C. D. *F*为*AD*中点

1. 阿基米德，公元前287年公元前212年是古希腊伟大的数学家、物理学家和天文学家他推导出的结论“圆柱内切球体的体积是圆柱体积的三分之二，并且球的表面积也是圆柱表面积的三分之二”是其毕生最满意的数学发现，后人按照他生前的要求，在他的墓碑上刻着一个圆柱容器里放了一个球如图所示，该球与圆柱的两个底面及侧面均相切，圆柱的底面直径与高都等于球的直径，若球的体积为，则圆柱的体积为

A. B. C. D.

1. 欧洲数学家雅各布伯努利收到一位朋友的来信，打开一看信不是写给他的，但是信封上的地址、姓名又没有问题，觉得很奇怪．过了几天，他收到了这位朋友的道歉信．这位朋友在信中向他解释说：写了五封信，又写好了五个信封，然后让仆人把信寄出，可是那位仆人在把信装到信封里时居然把它们全部都装错了看完信后他不禁哈哈大笑．不过他马上想到了一个问题：五封信装入写有不同地址和姓名的五个信封，全部装错的可能性有种？

A. 42 B. 44 C. 48 D. 96

1. 已知椭圆*C*：的左右顶点分别为*A*和*B*，*P*是椭圆上不同于*A*，*B*的一点．设直线*AP*，*BP*的斜率分别为*m*，*n*，则当取最小值时，椭圆*C*的离心率为

A. B. C. D.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求的。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得2分。

1. 若非负实数*a*，*b*满足，则下列不等式中成立的有

A. B. C. D.

1. 已知函数的图象对称轴与对称中心的最小距离为，则下列结论正确的是

A. 函数的最小正周期为 B. 函数的图象关于点对称  
C. 函数的图象关于直线对称 D. 函数在上单调递减

1. 在棱长为2的正方体中，点*P*是棱*BC*的中点，点*Q*是底面上的动点，且，则下列说法正确的有

A. *DP*与所成角的最大值为

B. 四面体*ABPQ*的体积不变  
C. 的面积有最小值

D. 平面截正方体所得截面面积不变

1. 瑞士著名数学家欧拉在1765年提出定理：三角形的外心、重心、垂心位于同一直线上这条直线被后人称为三角形的“欧拉线”在平面直角坐标系中作，，点，点，且其“欧拉线”与圆相切，则下列结论正确的是

A. 圆*M*上点到直线的最小距离为  
B. 圆*M*上点到直线的最大距离为  
C. 若点在圆*M*上，则的最小值是  
D. 圆与圆*M*有公共点，则*a*的取值范围是

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

1. 记为等差数列的前*n*项和，若，则\_\_\_\_\_\_．
2. 随着经济发展，重庆市居住环境进一步改善，市民休闲活动的公园越来越多，其中，最新打造的网红公园有璧山枫香湖儿童公园、渝北中央公园、礼嘉智慧公园．某个节假日，甲、乙、丙、丁四组家庭到这个网红公园打卡，通过访问和意向筛查，最后将这四组家庭的意向汇总如下：

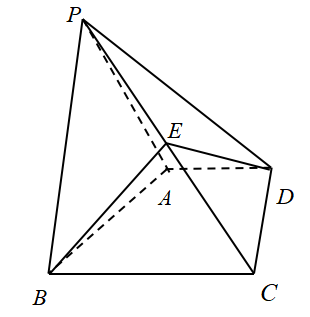
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 公园 | 璧山枫香湖儿童公园 | 渝北中央公园 | 礼嘉智慧公园 |
| 有意向的家族组 | 甲、乙、丙 | 甲、乙、丁 | 乙、丙、丁 |

若每组家庭只能从已登记的选择意向中随机选取一项，且每个公园至多有两组家庭选择，则甲、乙两组家庭选择同一个公园打卡的概率为\_\_\_\_\_\_．

1. 有四根长都为2的直铁条，若再选两根长都为*a*的直铁条，使这六根铁条端点处相连能够焊接成一个三棱锥形的铁架，则*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_．
2. 若函数的定义域为*R*，则实数*a*的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。  
17.在中，角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，且．  
求角*B*的大小；  
若为锐角三角形，其外接圆半径为，求周长的取值范围．

18.已知数列的前*n*项和，且，正项等比数列满足，．  
求数列和的通项公式；  
若，求数列的前*n*项和．

19. 如图，在四棱锥中，平面底面*ABCD*，，，，，是正三角形，*E*是*PC*的中点．

1求证：平面*PAB*；

2求直线*BE*与平面*PCD*所成角的正弦值．

20. 重庆缙云网络公司为北碚区柳荫镇培养了100名“乡土直播员”，以帮助宣传该柳荫农耕文化和销售农副产品，从而带领柳荫人民实现乡村振兴该公司将这100名“乡土直播员”中每天直播时间不少于5小时的评为“网红乡土直播员”，其余的评为“乡土直播达人”根据实际评选结果得到了如表列联表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 网红乡土直播员 | 乡土直播达人 | 合计 |
| 男 | 10 | 40 | 50 |
| 女 | 20 | 30 | 50 |
| 合计 | 30 | 70 | 100 |

根据列联表判断是否有的把握认为“网红乡土直播员”与性别有关系；

在“网红乡土直播员”中按分层抽样的方法抽取6人，在这6人中选2人作为“乡土直播推广大使”，求这2人恰是一男一女的概率．

附：，．

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| *k* |  |  |  |  |  |

21. 给定椭圆，称圆心在原点*O*，半径为的圆是椭圆*C*的“卫星圆”若椭圆*C*的离心率，点在*C*上．

求椭圆*C*的方程和其“卫星圆”方程；

2点*P*是椭圆*C*的“卫星圆”上的一个动点，过点*P*作直线使得 与椭圆*C*与椭圆*C*都只有一个交点，且分别交其“卫星圆”于点*M*，*N*，证明：弦长为定值．

22. 设函数  
当时，求函数在区间上的值域；

设函数的定义域为*I*，若，且，则称为函数的“壹点”已知在区间上有4个不同的“壹点”，求实数*a*的取值范围．

★秘密·2021年9月23日17：00前

重庆市2021-2022学年（上）9月月度质量检测

**高三数学答案及评分标准**

【命题单位：重庆缙云教育联盟】

1.【答案】*D*

【解析】解：因为，，，  
当时，，，0，1，2；  
当时，，0，1；  
当时，，0，1；  
当时，；  
当时，．  
所以满足条件的数对有13个，即集合*A*中元素的个数为13．  
故选：*D*．  
分别取，1，，2，，求出对应的*y*的值，即可得到满足条件的数对，从而得到答案．  
本题考查了集合中元素个数的确定，解题的关键是分别取*x*的值，求解*y*的值，考查了逻辑推理能力与运算能力，属于基础题．

2.【答案】*A*

【解析】解：，  
复数*z*在复平面内对应的点在虚轴上，  
，即．  
故选：*A*．  
根据已知条件，结合复数的乘法原则和复数的几何含义，即可求解．  
本题主要考查复数的乘法原则和复数的几何含义，属于基础题．

3.【答案】*D*

【解析】

【分析】

 本题考查的是充分必要条件的判定及线面平行性质、判定的应用由条件不能推出结论，但结论不能推出条件，故是既不充分也不必要条件．

【解答】

解：直线，平面，，

因为由可得或*l*与*m* 异面，

由可得或，

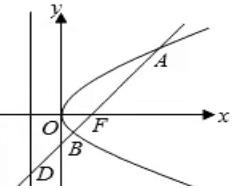
所以”“是“”的既不充分也不必要条件．

故选*D*．

4.【答案】*D*

【解析】解：，  
，解得，  
，  
．  
故选：*D*．  
利用向量平行和向量数量积的坐标表示解题．  
该题考查向量平行和向量数量积的坐标表示，属于基础题．

5.【答案】*D*

【解析】解：根据题意，直线*AB*的方程为，  
即直线*AB*的方程为，  
联立，  
得，  
解得，，  
所以，解得，故*A*不正确；  
把代入直线*AB*的方程，可得，  
所以，  
把代入直线*AB*的方程，，  
所以，又，  
线段*DF*的中点为，  
所以线段*DF*的中点不是点*B*，故*B*不正确；  
由抛物线的定义可得，故*C*错误；  
由上可得，  
线段*AD*的中点为，即为点*F*，故*D*正确．  
故选：*D*．  
写出直线*AB*的方程，联立抛物线的方程，解得*A*，*B*点坐标，结合抛物线的定义，中点坐标公式可得答案．  
本题考查直线与抛物线的相交问题，解题中需要一定的计算能力，属于中档题．

6.【答案】*C*

【解析】

【分析】  
本题考查了球的体积和圆柱的体积，属于基础题．

根据球的体积公式求出半径，根据圆柱的体积公式可求得结果．

【解答】  
解：设球的半径为*R*，则，所以，

所以圆柱的底面半径为，圆柱的高为，

所以圆柱的体积为．

故选：*C*

7.【答案】*B*

【解析】

【分析】  
本题考查分类计数原理与分步计数原理的应用，属于基础题．  
先分步装信，再分类讨论即可求解．  
【解答】  
解：将五封信编号为1，2，3，4，5，将五个信封编号为，，，，；  
1号信先去装信封有4种选择，不妨设1号信封装入号信封，  
则第2号信去装有4种可能，但此时要分两种情况：  
第一种情况是2号信装入信封，则3，4，5号信装错的种数是2种，  
第二种情况是2号信装入，，中的一个，此时3，4，5号信装错的种数是3种，  
故所有种数为．  
故选*B*．

8.【答案】*A*

【解析】

【分析】  
本题考查了椭圆的性质及几何意义、利用导数研究函数的单调性极值与最值，属于较难题．  
设， ，，则 ， 令，则，利用导数求出最值，可得，进而可得离心率．  
【解答】  
解：设， ，，  
则，， ，  
 ，  
 令，则，  
，  
时，单调递减，时，单调递增，   
可知：当时，函数取得最小值，  
 ．  
 故选*A*

9.【答案】*ABD*

【解析】解：对于*A*，，当且仅当时等号成立，即，时等号成立，故*A*正确；  
对于*B*，，当且仅当时等号成立，即，时等号成立，故*B*正确；  
对于*C*，，  
当且仅当时等号成立，即，时等号成立，故*C*错误；  
对于*D*，，当且仅当，即，时等号成立，故*D*正确．  
故选：*ABD*．  
对于*A*，利用基本不等式即可判断；对于*B*，由已知利用平方和公式，基本不等式即可判断；对于*C*，利用平方和公式，基本不等式即可判断；对于*D*，由已知利用二次函数的性质即可判断．  
本题主要考查了基本不等式的应用，考查了转化思想和函数思想的应用，属于中档题．

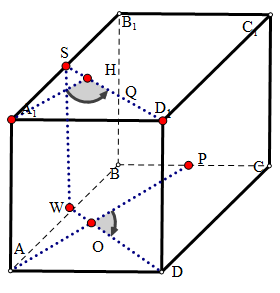
10.【答案】*BC*

【解析】

【分析】  
本题考查三角函数的图象与性质，属于中档题．  
首先求出函数的周期，即可求出参数的值，即可得到函数解析式，再根据正弦函数的性质一一判断即可．  
【解答】  
解：依题意，所以，所以，解得，即，故*A*错误；  
当时，，故函数关于点对称，故*B*正确  
当时，，所以函数的图象关于直线对称，故*C*正确  
当，，因为在上单调递增，所以函数在上单调递增，故*D*错误  
故选：*BC*．

11.【答案】*BCD*

【解析】

【分析】  
本题考查空间中线线、线面、面面间的位置关系，考查四面体体积，平面与多面体截面积等有关知识，属于较难题，解题时取*AB*中点*W*，中点*S*，可先根据，确定*Q*位置就在上，然后根据体积，面积等公式逐项检验即可．  
【解答】  
解：如图，  
  
取*AB*中点*W*，中点*S*，连接，  
在正方形*ABCD*中，易得，又，  
，，  
所以，  
因为点*Q*是底面上的动点，且，  
故点*Q*在上运动，，  
所以*DP*与所成角就是*DP*与*DW*所成的角，即，  
易得，  
直角三角形*DOP*不是等腰直角三角形，故 *A*错误  
由于三角形*ABP*面积固定，*Q*在上底面，*Q*到面*ABP*距离为2不变，故四面体*ABPQ*体积不变， *B*正确  
因为*Q*点在上，过向作垂线，垂足为*H*，即是符合条件的*Q*点，  
的面积有最小值就是的面积，  
和上底面垂直，是直角，  
所以面积为， *C*正确  
平面就是过点*P*与确定的平面，不因*Q*变化而变化，故平面截正方体的截面面积不会改变， *D*正确，   
故选 *BCD*．

12.【答案】*ACD*

【解析】

【分析】  
本题考查直线方程的求法，点到直线的距离，直线与圆的位置关系以及圆与圆的位置关系，属较难题．  
先求出“欧拉线”即为线段*BC*的垂直平分线的方程，利用点到直线的距离可判断*A*、*B*，利用直线与圆相切，可求*z*的最值，根据圆与圆的位置关系可判断*D*，由此可得结论．  
【解答】  
解：由可得外心、重心、垂心均在线段*BC*的垂直平分线上，  
即的“欧拉线”即为线段*BC*的垂直平分线，  
由点，点可得线段*BC*的中点为，且直线的*BC*的斜率

所以线段*BC*的垂直平分线的斜率，

所以线段*BC*的垂直平分线的方程为即，

又圆*M*：的圆心为，半径为*r*，

所以点到直线的距离为，

所以圆*M*：，

对于*A*、*B*，圆*M*的圆心到直线的距离，  
所以圆上的点到直线的最小距离为，  
最大距离为，  
故*A*正确，*B*错误；

对于*C*，令，即，  
当直线与圆*M*相切时，圆心到直线的距离为，  
解得或，  
则的最小值是，故*C*正确；

对于*D*，圆圆心为，半径为，  
若该圆与圆*M*有公共点，  
则，  
即，解得，故*D*正确．

故选：*ACD*．

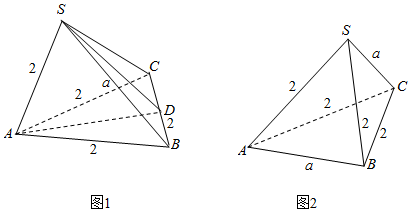
13.【答案】24

【解析】解：由是等差数列，得，解得，  
所以，  
故答案为：24．  
通过等差数列的性质可求得，从而利用求出结果即可．  
本题考查等差数列的性质，考查学生的逻辑推理和运算求解的能力，属于基础题．

14.【答案】

【解析】解：选璧山枫香湖儿童公园和渝北中央公园时，有以下情况：甲丙、乙丁；乙丙、甲丁；  
选璧山枫香湖儿童公园和礼嘉智慧公园时，有以下情况：甲乙、丙丁；甲丙、乙丁；  
选礼嘉智慧公园和渝北中央公园时，有以下情况：甲乙、丙丁；甲丁、乙丙；  
选3个公园时，有以下几种情况：甲乙、丁、丙；甲丙、乙、丁；甲丙、丁、乙；乙丙、甲、丁；  
丙、甲乙、丁；乙、甲丁、丙；丙、甲丁、乙；乙、甲丁、丙；丙、甲丁、乙；  
    甲、丁、乙丙；丙、甲、乙丁；甲、乙、丙丁；乙、甲、丙丁；  
共有18种选择，其中甲、乙两组家庭选择同一个公园打卡的4种，则甲、乙两组家庭选择同一个公园打卡的概率为．  
故答案为：．  
分以下三种情况枚举所有情况即可，选璧山枫香湖儿童公园和渝北中央公园，选璧山枫香湖儿童公园和礼嘉智慧公园，选礼嘉智慧公园和渝北中央公园，利用古典概型计算公式即可．  
本题考查了古典概型、计数原理，属于中档题．

15.【答案】

【解析】   
解：根据三棱锥的相对位置，将底面三角形的三边长分成两种情形：  
当底面是边长为2的正三角形，三条侧棱长为2，*a*，*a*，如图1，  
此时*a*取最大值，可知，，  
由于，则有，  
即，即有   
构当底面三角形的边长分别为*a*，2，2，其他各边长为2，2，*a*，  
如图所示，此时*a*可以取最大为任意正数；  
综上则*a*的取值范围是；  
故答案为：  
根据三棱锥的相对位置，将底面三角形的三边长分成两种情形：当底面是边长为2的正三角形，三条侧棱长为2，*a*，*a*此时*a*取最大值，当底面三角形的边长分别为*a*，2，2，其他各边长为2，2，*a*，有最小值，从而求得*a*的取值范围．  
本小题主要考查棱锥的结构特征、解三角形等基础知识，考查空间想像能力，分类讨论思想，属于基础题．

16.【答案】

【解析】

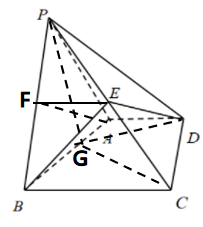
【分析】  
本题考查函数的定义域，属基础题．  
根据指数函数性质，以及被开方数大于等于列出不等式，可得答案．  
【解答】  
解：由题意得，得，即，  
则有，解得，  
即实数*a*的取值范围为．  
故答案为．

17.【答案】解：中，由，  
利用正弦定理可得，  
因为，所以，  
又，  
所以，或；  
若为锐角三角形，由知，且外接圆的半径为，  
由正弦定理得，可得，  
由正弦定理得，  
所以；  
因为，  
所以，  
又为锐角三角形，则，且，  
又，则，所以；  
所以；  
所以，即周长的取值范围是．

【解析】由正弦定理，即可求出cos*B*以及*B*的值；  
利用正弦定理和三角恒等变换，即可求出的取值范围，再求周长的取值范围．  
本题考查了解三角形的应用问题，也考查了运算求解能力，是中档题．

18.【答案】当时，，  
由，  
得，  
即，  
当时，，  
当时，，  
所以；  
设正项等比数列的公比为，  
则，  
所以，  
解得或舍；  
所以．  
当时，，  
当时，，  
即．

【解析】直接利用数列的递推关系式的应用求出数列的通项公式；  
利用分类讨论思想的应用，进一步利用分组法的应用求出数列的和．  
本题考查的知识要点：数列的递推关系式，数列的通项公式的求法及应用，数列的求和，分组法的求和，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于中档题．

19.【答案】Ⅰ取*BP*中点*F*，连结*AF*、*EF*，则，  
又由和得，  
所以，则四边形*ADEF*为平行四边形，  
所以，  
又平面*PAB*，平面*PAB*，  
所以平面*PAB*；  
Ⅱ取*AB*的中点*G*，连结*PG*、*CG*、*DG*，  
由是正三角形，得，  
由平面底面*ABCD*，平面底面，  
所以平面*ABCD*，  
在直角梯形*ABCD*中，令，则，由平面几何知识可得，  
，，，，，  
所以，，  
设*B*到平面*PCD*的距离为*d*，  
，则，  
 所以，  
由，即，得，  
所以直线*BE*与平面*PCD*所成角的正弦值为．  


【解析】本题考查了线面平行的判定和直线与平面所成角，是中档题．  
Ⅰ取*BP*中点*F*，连结*AF*、*EF*，可得四边形*ADEF*为平行四边形，所以，由线面平行的判定即可得证；  
Ⅱ取*AB*的中点*G*，由面面垂直的性质得平面*ABCD*，令，则，经过计算由，可得*B*到平面*PCD*的距离为*d*，可得直线*BE*与平面*PCD*所成角的正弦值．

20.【答案】解：由题中列联表可得，．

有的把握认为“网红乡土直播员”与性别有关系．

在“网红乡土直播员”中按分层抽样的方法抽取6人，男性人数为人，记为*A*，*B*；女性人数为人，记为*a*，*b*，*c*，*d*．

则从这6人中随机抽取2人的所有可能情况有以下“*A*，*B*；*A*，*a*；*A*，*b*；*A*，*c*；*A*，*d*；*B*，*a*；*B*，*b*；*B*，*c*；*B*，*d*；*a*，*b*；*a*，*c*；*a*，*d*；*b*，*c*；*b*，*d*；*c*，*d*”共15种．

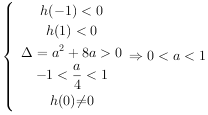
其中，选中的2人中恰有一男一女的所有可能情况有以下“*A*，*a*；*A*，*b*；*A*，*c*；*A*，*d*；*B*，*a*；*B*，*b*；*B*，*c*；*B*，*d*”共8种．

选中的2人中恰有一男一女的概率．

【解析】本题考查独立性检验、分层抽样以及古典概型概率求解，属于中档题．  
根据列联表，求出的观测值，再结合临界值表作比较，即可得到答案；  
在“网红乡土直播员”中按分层抽样的方法抽取6人，男性人数为人，记为*A*，*B*；女性人数为人，记为*a*，*b*，*c*，再运用列举法以及古典概型的概率公式求解，即可得到两人中恰有一男一女的概率．

21.【答案】解：Ⅰ由条件可得：        
解得  
所以椭圆的方程为，  
卫星圆的方程为                                 
Ⅱ当 中有一条无斜率时，不妨设无斜率，  
因为与椭圆只有一个公共点，则其方程为或，  
当方程为时，此时与“卫星圆”交于点和，  
此时经过点且与椭圆只有一个公共点的直线是  
或，即为或，  
   
线段*MN*应为“卫星圆”的直径，  
．  
当都有斜率时，设点，其中，  
设经过点与椭圆只有一个公共点的直线为，  
则  
消去*y*得到，  
，  
   ，  
所以，满足条件的两直线垂直    
  线段*MN*应为“卫星圆”的直径，                             
综合知：因为经过点，又分别交其准圆于点*MN*，  
且垂直，  
所以线段*MN*准圆的直径，  
为定值．

【解析】本题考查了椭圆的标准方程及其性质、新定义、考查了直线与椭圆的位置关系，直线斜率的运算及直线垂直性质，考查分析推理能力，属于较难题．  
Ⅰ根据已知条件得到，解出*a*，*b*即可得到椭圆的方程及卫星圆的方程．  
Ⅱ分情况讨论当 中有一条无斜率时及当都有斜率时，得到线段*MN*应为“卫星圆”的直径 故可证明弦长为定值．

22.【答案】解：  
，  
当时，，  
令，则  
所以函数在上单调递增，上单调递减，  
所以函数在的值域为  
由题意在区间有四解，  
令  
则在区间上有4个零点，  
令，则  
若在上有两个非零零点，  
则；  
若的两个零点为，则，无解，故舍去；  
若的两个零点为，则，无解，故舍去．  
综上：

【解析】本题考查正弦函数的二倍角公式，换元法，三角函数的性质，二次函数的性质，函数零点与方程根的关系，分类讨论思想，属中档题．  
先利用二倍角公式化简函数，再利用换元法，利用三角函数性质确定自变量*t*的定义域，再利用二次函数的性质求出值域．  
由题意在区间有四解，令则在区间上有4个零点，令，再分别对的零点个数分类讨论求出答案．