西安中学高2021届高三12月月考

理科数学试题

**一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）**

1. 若集合$A=\{(x,y)|x+y=1\}$，$B=\{x|x-y=1\}$，则$A∩B$等于  $($    $)$

A. $\{\left(1,0\right)\}$ B. $\{1\}$ C. $(1,0)$ D. $∅$

1. 已知平面内有三点$A(-1,7)$，$B(2,3)$，$C(3,5)$，则向量$\vec{AB}$在$\vec{BC}$方向上的投影为$($     $)$

A. $-1$ B. $1$ C. $-\sqrt{5}$ D. $\sqrt{5}$

1. 过抛物线$y^{2}=4x$的焦点*F*的直线交抛物线于*A*，*B*两点，若线段*AB*的中点*M*到*y*轴的距离为2，则$|AB|=(     )$

A. 8 B. 6 C. 5 D. 4

1. 中兴、华为事件暴露了我国计算机行业中芯片、软件两大短板，为防止“卡脖子”事件的再发生，科技专业人才就成了决胜的关键．为了解我国在芯片、软件方面的潜力，某调查机构对我国若干大型科技公司进行调查统计，得到了这两个行业从业者的年龄分布的饼状图和“90后”从事这两个行业的岗位分布雷达图，则下列说法中不一定正确的是$(     )$



A. 芯片、软件行业从业者中，“90后”占总人数的比例超过$50％$
B. 芯片、软件行业中从事技术、设计岗位的“90后”人数超过总人数的$25％$
C. 芯片、软件行业从事技术岗位的人中，“90后”比“80后”多
D. 芯片、软件行业中，“90后”从事市场岗位的人数比“80前”的总人数多

1. 如图,某几何体的三视图是直角边长为1的三个等腰直角三角形，则该几何体的外接球的表面积为$(     )$

A. $\frac{3}{2}π$ B. $\sqrt{3}π$ C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $3π$

1. 在$(x^{3}-1)(x-\frac{1}{\sqrt{x}})^{6}$的展开式中，常数项等于（ ）

A. 15 B.16 C. $-16$ D. $-14$

1. 已知抛物线*C*：$y^{2}=2px(p>0)$的焦点为*F*，准线*l*与*x*轴的交点为*A*，*M*是抛物线*C*上的点，$MF⊥x$轴，若以*AF*为直径的圆截直线*AM*所得的弦长为2，则$p=(  )$

A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

1. 为防止部分学生考试时用搜题软件作弊，命题组指派5名教师对数学卷的选择题、填空题和解答题这三种题型进行改编，则每种题型至少指派1名教师的不同分派方法种数为$(     )$

A. 150 B. 180 C. 200 D. 280

1. 设复数*z*满足$|z-i|+|z+i|=4$，*z*在复平面内对应的点为$(x,y)$，则$(     )$

A. $\frac{x^{2}}{4}-\frac{y^{2}}{3}=1$ B. $\frac{x^{2}}{4}+\frac{y^{2}}{3}=1$ C. $\frac{y^{2}}{4}-\frac{x^{2}}{3}=1$ D. $\frac{y^{2}}{4}+\frac{x^{2}}{3}=1$

1. 如图所示，正方形上连接着等腰直角三角形，等腰直角三角形腰上再连接正方形，$…$，如此继续下去得到一个树形图形，称为“勾股树”$.$若某勾股树含有255个正方形，且其最大的正方形的边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，则其最小正方形的边长为$(     )$

A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{32}$ C. $\frac{1}{32}$ D. $\frac{1}{64}$

1. 已知直线$l:y=k(x+4)$与圆$(x+2)^{2}+y^{2}=4$相交于*A*、*B*两点，*M*是线段*AB*的中点，则点*M*到直线$3x-4y-6=0$的距离的最大值为$($    $)$

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

1. 设椭圆*E*：$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>b>0)$的一个焦点为$F(1,0)$，点$A(-1,1)$为椭圆*E*内一点，若椭圆*E*上存在一点*P*，使得$\left|PA\right|+\left|PF\right|=9$，则椭圆*E*的离心率的取值范围是$($   $)$

A. $[\frac{1}{2},1)$ B.$[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ C. $[\frac{1}{5},\frac{1}{4}]$ D. $[\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$

**二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）**

1. 已知变量*x*，*y*满足，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_．
2. 设$S\_{n}$是公差不为零的等差数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前n项和，且$a\_{7}=-2a\_{1}，$则$\frac{S\_{9}}{S\_{5}+a\_{4}}=$\_\_\_\_\_\_\_\_．
3. 已知函数$f(x)=Asin(ωx+φ)(A>0,|φ|<\frac{π}{2},ω>0)$的部分图象如图所示，将函数$f(x)$的图象向左平移$a(a>0)$个单位长度后，所得图象关于直线$x=\frac{3π}{4}$对称，则$a$的最小值为\_\_\_\_\_\_．
4. 已知$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$是同一平面内的三个向量，其中$\vec{a}$，$\vec{b}$是相互垂直的单位向量，且

$(\vec{a}-\vec{c})⋅(\sqrt{3}\vec{b}-\vec{c})=1$，$|\vec{c}|$的最大值为\_\_\_\_\_\_．

**三、解答题（共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17**$\~$**21题为必考题，每个试题考生都必须作答.第22，23题为选考题，考生根据要求作答.）**

**（一）必考题.（共60分）**

1. （12分）在锐角$△ABC$中，内角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，已知$△ABC$的面积$S=\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{4}$．

$($1$)$求*A*；

$($2$)$作角*B*的平分线交边*AC*于点*O*，记$△BOA$和$△BOC$的面积分别为$S\_{1}$，$S\_{2}$，求$\frac{S\_{1}}{S\_{2}}$的取值范围．

1. （12分）已知三棱锥$P-ABC($如图一$)$的平面展开图$($如图二$)$中，四边形*ABCD*为边长等于$\sqrt{2}$的正方形，$△ABE$和$△BCF$均为正三角形，在三棱锥$P-ABC$中：


$(1)$证明：平面$PAC⊥$平面*ABC*；

$(2)$若点*M*在棱*PA*上运动，当直线*BM*与平面*PAC*所成的角最大时，求二面角

$M-BC-A$的余弦值．

1. （12分）计划在某水库建一座至多安装3台发电机的水电站．过去50年的水文资料显示，水库年入流量$X($年入流量：一年内上游来水与库区降水之和．单位：亿立方米$)$都在40以上．其中，不足80的年份有10年，不低于80且不超过120的年份有35年，超过120的年份有5年，将年入流量在以上三段的频率作为相应段的概率，并假设各年的入流量相互独立．
$(1)$求未来3年中，至多有1年的年入流量超过120的概率；

$(2)$水电站希望安装的发电机尽可能运行，但每年发电机最多可运行台数受年入流量*X*限制，并有如下关系：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 年入流量*X* | $$40<X<80$$ | $$80\leq X\leq 120$$ | $$X>120$$ |
| 发电机最多可运行台数 | 1 | 2 | 3 |

若某台发电机运行，则该台发电机年利润为$5 000$万元；若某台发电机未运行，则该台发电机年亏损800万元．欲使水电站年总利润的均值达到最大，应安装发电机多少台？

1. （12分）已知椭圆*C*：$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>b>0)$过点$A(2,0)$，且离心率为$\frac{1}{2}$．

$(1)$求椭圆*C*的方程；

$(2)$若斜率为$k(k\ne 0)$的直线*l*与椭圆*C*交于不同的两点*M*，*N*，且线段*MN*的垂直平分线过点$\left(\frac{1}{8},0\right)$，求*k*的取值范围．

1. （12分）已知函数$f(x)=\frac{1}{2}x^{2}-2x+alnx$，其中$a>0$．
$(1)$讨论$f(x)$的单调性；
$(2)$若$f(x)$有两个极值点*x*$ \_{1}$，*x*$ \_{2}$，证明：$-3<f(x \_{1})+f(x \_{2})<-2$．

**（二）选考题.（共10分.请考生在第22，23题中任选一题作答.如果多做，那么按所做的第一题计分.）**

1. （10分）在平面直角坐标系$xOy$中，曲线$C\_{1}$是圆心在(0，2)，半径为2的圆，曲线$C\_{2}$的参数方程为，以坐标原点*O*为极点，轴非负半轴为极轴建立极坐标系．

 (1) 求曲线$C\_{1}$的极坐标方程；

(2)若曲线$C\_{2}$与两坐标轴分别交于$A，B$两点，点为线段*AB*上任意一点，直线*OP*与曲线$C\_{1}$交于点*M*（异于原点），求$\frac{|OM|}{|OP|}$的最大值．

1. （10分）已知$x,y\in R$，且$x+y=1$．

$($1$)$求证：$x^{2}+3y^{2}\geq \frac{3}{4}$；

$($2$)$当$x>0，y>0$时，不等式$(\frac{1}{x^{2}}-1)(\frac{1}{y^{2}}-1)\geq |a-2|+|a+1|$恒成立，求*a*的取值范围．

西安中学高2021届高三12月月考

理科数学答案

 一、选择题：**（本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| D | C | B | C | D | D | B | A | D | A | B | C |

1. **填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）**
2. ** 14、18 15、 16、**
3. **解答题（共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17**$\~$**21题为必考题，每个试题考生都必须作答.第22，23题为选考题，考生根据要求作答.）**
4. 解：，
整理得$sin A=\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}=cos A$，
因此$tanA=1$，
又$A\in (0,π)$，
所以$A=\frac{π}{4}$；
 $($2$)\frac{S\_{1}}{S\_{2}}=\frac{\frac{1}{2}c·\left|BO\right|·sin∠ABO}{\frac{1}{2}a·\left|BO\right|·sin∠CBO}=\frac{c}{a}$ ，
由正弦定理得：，
因为$C\in (\frac{π}{4},\frac{π}{2})$，
$∴sin C\in (\frac{\sqrt{2}}{2},1)$，
所以$\frac{S\_{1}}{S\_{2}}=\sqrt{2}sinC\in (1,\sqrt{2})$.
5. 解：$(1)$证明：设*AC*的中点为*O*，连接$BO, PO$，
由题意，得$PA=PB=PC=\sqrt{2}, PO=1$，$AO=BO=CO=1$，
因为在$△PAC$中，$PA=PC, O$为*AC*的中点，
所以，
因为在$△POB$中，$PO=1, OB=1, PB=\sqrt{2}$，$PO^{2}+OB^{2}=PB^{2}$，
所以，
因为$AC∩OB=O$，$AC⊂$平面*ABC*，$OB⊂$平面*ABC*，
所以平面*ABC*，
因为$PO⊂$平面*PAC*，
所以平面平面*ABC*；
$(2)$由$(1)$知，，
$PO⊂$平面*PAC*，$AC⊂$平面*PAC*，
平面*PAC*，
所以就是直线*BM*与平面*PAC*所成的角．
且，
所以当*OM*最短时，即*M*是*PA*的中点时，最大．
由平面，所以，
于是以*O*为坐标原点，$OC, OB, OP$所在直线分别为*x*轴，*y*轴，*z*轴建立如图所示空间直角坐标系，
则$O(0,0,0), C(1,0,0), B(0,1,0),A(-1,0,0)$，$P(0,0,1), M(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$，$\vec{BC}=(1,-1,0), \vec{PC}=(1,0,-1), \vec{MC}=(\frac{3}{2},0,-\frac{1}{2})$，
设平面*MBC*的法向量为$\vec{m}=(x\_{1},y\_{1},z\_{1})$，则$\left\{\begin{matrix}\vec{m}⋅\vec{BC}=0\\\vec{m}⋅\vec{MC}=0\end{matrix}\right.$，得$\left\{\begin{matrix}x\_{1}-y\_{1}=0\\3x\_{1}-z\_{1}=0\end{matrix}\right.$，
令$x\_{1}=1$，得$y\_{1}=1,z\_{1}=3$，即$\vec{m}=(1,1,3)$，
取平面*ABC*的法向量为，



，
由图可知，二面角$P-BC-M$的余弦值为．

1. 解：$(1)$依题意，得，
，
．
由二项分布，记“在未来4年中，至多有1年的年入流量超过120”为事件A，


$(2)$记水电站年总利润为$Y($单位：万元$)$．
$①$安装1台发电机的情形：由于水库年入流量总大于40，故一台发电机运行的概率为1，对应的年利润$Y=5000$，$E(Y)=5000×1=5000$．
$②$安装2台发电机的情形：依题意，当$40<X<80$时，一台发电机运行，此时$Y=5000-800=4200$，因此$P(Y=4200)=P(40<X<80)=p\_{1}=0.2$；当$X\geq 80$时，两台发电机运行，此时$Y=5000×2=10000$，因此$P(Y=10000)=P(X\geq 80)=p\_{2}+p\_{3}=0.8.$由此得*Y*的概率分布列如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Y* | 4200 | 10000  |
| *P* | $$0.2$$ | $$0.8$$ |

所以$E(Y)=4200×0.2+10000×0.8=8840$．
$③$安装3台发电机的情形：
依题意，当$40<X<80$时，一台发电机运行，此时$Y=5000-1600=3400$，
因此$P(Y=3400)=P(40<X<80)=p\_{1}=0.2$；
当$80\leq X\leq 120$时，两台发电机运行，此时$Y=5000×2-800=9200$，
因此$P(Y=9200)=P(80\leq X\leq 120)=p\_{2}=0.7$；
当$X>120$时，三台发电机运行，此时$Y=5000×3=15000$，
因此$P(Y=15000)=P(X>120)=p\_{3}=0.1$，
由此得*Y*的概率分布列如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Y* | 3400 | 9200 | 15000  |
| *P* | $$0.2$$ | $$0.7$$ | $$0.1$$ |

所以，$E(Y)=3400×0.2+9200×0.7+15000×0.1=8620$．
综上，欲使水电站年总利润的均值达到最大，应安装发电机2台．

1. 解：$(1)$设椭圆*C*的焦距为2*c*，
因为椭圆过点$A(2,0)$，所以$a=2$．
因为$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以$c=1$．
因为$a^{2}=b^{2}+c^{2}$，所以$b^{2}=a^{2}-c^{2}=3$．
所以椭圆*C*的方程为$\frac{x^{2}}{4}+\frac{y^{2}}{3}=1$．
$(2)$设直线*l*的方程为$y=kx+m$，直线*l*与椭圆*C*交于两点$M(x\_{1},y\_{1})$，$N(x\_{2},y\_{2})$，
由$\left\{\begin{matrix}\frac{x^{2}}{4}+\frac{y^{2}}{3}=1\\y=kx+m\end{matrix}\right.$，
消去*y*并整理得$(3+4k^{2})x^{2}+8kmx+4m^{2}-12=0$，
$∵$直线$y=kx+m$与椭圆有两个交点，
$∴Δ=(8km)^{2}-4(3+4k^{2})(4m^{2}-12)>0$，即$m^{2}<4k^{2}+3$，
因为$x\_{1}+x\_{2}=-\frac{8km}{3+4k^{2}}$，
所以$y\_{1}+y\_{2}=k(x\_{1}+x\_{2})+2m=\frac{6m}{4k^{2}+3}$，
设线段*MN*的中点为$P(\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2},\frac{y\_{1}+y\_{2}}{2})$，则有$P(\frac{-4km}{4k^{2}+3},\frac{3m}{4k^{2}+3})$．
所以线段*MN*的垂线平分线方程为$y-\frac{3m}{4k^{2}+3}=-\frac{1}{k}(x+\frac{4km}{4k^{2}+3})$．
因为线段*MN*的垂线平分线过点$(\frac{1}{8},0)$，
所以$m=-\frac{4k^{2}+3}{8k}$．
因为$m^{2}<4k^{2}+3$，
所以$\left(-\frac{4k^{2}+3}{8k}\right)^{2}<4k^{2}+3$，即$k^{2}>\frac{1}{20}$．
解得$k<-\frac{\sqrt{5}}{10}$或$k>\frac{\sqrt{5}}{10}$．
所以*k*的取值范围是．
2. $(1)$解：由题得$f^{'}(x)=x-2+\frac{a}{x}=\frac{x^{2}-2x+a}{x}$，其中$x>0$，
令$g(x)=x^{2}-2x+a$，其中对称轴为$x=1$，．
若$a⩾1$，则，此时$g(x)⩾0$，则$f^{'}(x)⩾0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty )$上单调递增；
若$0<a<1$，则，此时$x^{2}-2x+a=0$在*R*上有两个根$x\_{1}=1-\sqrt{1-a}$，$x\_{2}=1+\sqrt{1-a}$，且$0<x\_{1}<1<x\_{2}$，所以当$x\in (0,x\_{1})$时，$g(x)>0$，则$f^{'}(x)>0$，$f(x)$单调递增；当$x\in (x\_{1},x\_{2})$时，$g(x)<0$，则$f^{'}(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in (x\_{2},+\infty )$时，$g(x)>0$，则$f^{'}(x)>0$，$f(x)$单调递增，
综上，当$a⩾1$时，$f(x)$在$(0,+\infty )$上单调递增；当$0<a<1$时，$f(x)$在$(0,1-\sqrt{1-a})$上单调递增，在$(1-\sqrt{1-a},1+\sqrt{1-a})$上单调递减，在$(1+\sqrt{1-a},+\infty )$上单调递增．
$(2)$证明：由$(1)$知，当$0<a<1$时，$f(x)$有两个极值点$x\_{1}$，$x\_{2}$，且$x\_{1}+x\_{2}=2$，$x\_{1}⋅x\_{2}=a$，所以

![f({x}_{1})+f({x}_{2})= \dfrac{1}{2}x_{1}^{2}−2{x}_{1}+a{\rm \ln } {x}_{1}+ \dfrac{1}{2}x_{2}^{2}−2{x}_{2}+a{\rm \ln } {x}_{2} = \dfrac{1}{2}(x_{1}^{2}+x_{2}^{2})−2({x}_{1}+{x}_{2})+a({\rm \ln } {x}_{1}+{\rm \ln } {x}_{2}) = \dfrac{1}{2}[{({x}_{1}+{x}_{2})}^{2}−2{x}_{1}{x}_{2}]−2({x}_{1}+{x}_{2})+a{\rm \ln } ({x}_{1}{x}_{2}) = \dfrac{1}{2}({2}^{2}−2a)−4+a{\rm \ln } a=a{\rm \ln } a−a−2]()
令，$0<x<1$，则只需证明$-3<h(x)<-2$，
由于，故$h(x)$在$(0,1)$上单调递减，
所以$h(x)>h(1)=-3$．
又当$0<x<1$时，，，
故，
所以，对任意的$0<x<1$，$-3<h(x)<-2$．
综上，可得$-3<f(x\_{1})+f(x\_{2})<-2$．

22、解： (1) **解法一：**设曲线与过极点且垂直于极轴的直线相交于异于极点的点*E*，且曲线上任意点*F*，边接*OF*，*EF*，则*OF*⊥*EF*，

在△*OEF*中，，

**解法二**：曲线的直角坐标方程为，

即，

 所以曲线的极坐标方程为；

（2）因曲线的参数方程为，与两坐标轴相交，

所以点，

所以线段极坐标方程为，

，,







，

当时取得最大值为．

1. $(1)$由柯西不等式得：
$[x^{2}+(\sqrt{3}y)^{2}][1^{2}+(\frac{1}{\sqrt{3}})^{2}]\geq (1⋅x+\sqrt{3}y⋅\frac{1}{\sqrt{3}})^{2}$，
$∴(x^{2}+3y^{2})×\frac{4}{3}\geq (x+y)^{2}=1$，当且仅当$x=3y=\frac{3}{4}$时取等号，
$∴x^{2}+3y^{2}\geq \frac{3}{4}$；
（2）$x>0$，$y>0$，




当且仅当$x=y=\frac{1}{2}$时等号成立，
要使得不等式$(\frac{1}{x^{2}}-1)(\frac{1}{y^{2}}-1)\geq |a-2|+|a+1|$恒成立，
即可转化为，
，



$∴a$的取值范围为：