**沧州一中高二年级第三次学段检测**

**数学试题（2021.6.3）**

**命题人：**

（满分：150分，测试时间：120分钟）

**第I卷（选择题，共60分）**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 在复平面内，复数的共轭复数对应的点位于

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 命题“**且”的否定是

A.**且 B.**或

C.**或 D.**且

3. 下列函数是偶函数且在上单调递增的是

A.  B.  C.  D. 

1. 已知表示不超过实数的最大整数，为取整函数，是函数的零点，则等于

A.1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 已知是抛物线的焦点，、是该抛物线上的两点，且，则线段的中点到轴的距离为

A.  B.  C.  D. 

1. 电影《你好，李焕英》在2021年正月初一正式上映，一对夫妇带着他们的两个孩子去观看该影片，订购的4张电影票恰好在同一排且连在一起. 为安全起见，影院要求每个孩子都至少有一位家长相邻陪坐，则不同的坐法种数是

A．20　 B．16 C．12　　 D．8

1. 若，，则

A．　 B．  C．　 D．

1. 已知函数（，且）在区间上为单调函数，若函数有两个不同的零点，则实数的取值范围是

A．　 B． C．　　 D．

1. **选择题： 本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分**
2. 下列命题正确的是
3. 回归直线过样本点的中心
4. 线性回归方程对应的直线至少经过其样本数据点

中的一个点

1. 在残差图中，残差点分布的带状区域的宽度越狭窄，其模型拟合的精确度越高
2. 在回归分析中，为0.98的模型比为0.80的模型拟合的效果好
3. 函数的大致图像可能是

  

A　 B C 　　 D

11. 已知定义在上的函数满足，，且在区间上单调递增.下列结论正确的是

A．是函数的最小值　 B．函数的图像的一个对称中心是点 C．　　 D．函数的图像的一条对称轴是直线

1. 已知定义在上的函数和定义在上的函数，若直线

同时满足：①，②，则称直线为与的图像的“隔离直线”.若，，则下列为与的图像的“隔离直线”的是

A.  B.  C.  D. 

**第II卷（非选择题，共90分）**

**三、填空题： 本题共4小题，每小题5分，共20分.**

1. 已知随机变量，若，则$=$\_\_\_\_\_\_\_\_

14. 若正实数、满足，则的取值范围是

15. 的展开式中的系数为\_\_\_\_\_\_\_\_

1. 已知为坐标原点，、分别是双曲线的左、右顶点，是双曲线上不同于、的动点，直线、与轴分别交于点、两点，则



**四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤**

17.（本小题满分10分）

设*p*：实数满足$x^{2}−3ax+2a^{2}<0$，其中$a>0$；*q*：实数$x$满足．

（Ⅰ）若$a=1$，*p*，*q*都是真命题，求实数*x*的取值范围；

（Ⅱ）若*p*是*q*的充分不必要条件，求实数*a*的取值范围．

18.（本小题满分12分）已知定义在$R$上的奇函数$f(x)$，当$x\geq 0$时，.

（Ⅰ）求的解析式，并判断在上的单调性（无需证明）；

（Ⅱ）若对任意的，不等式恒成立，求实数的取值范围.

19.（本小题满分12分）

某学校对甲、乙、丙、丁四支足球队进行了一次选拔赛，积分前两名的球队将代表学校参加市级比赛.选拔赛采用单循环制（每两个队比赛一场），胜一场积3分，平一场积1分，负一场积0分.经过三场比赛后，积分状况如下表所示：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 | 积分 | 名次 |
| 甲 |  | 3:3 | 5:3 | 4:1 | 7 |  |
| 乙 | 3:3 |  |  |  | 1 |  |
| 丙 | 3:5 |  |  |  | 0 |  |
| 丁 | 1:4 |  |  |  | 0 |  |

根据以往的比赛情况统计，乙队与丙队比赛，乙队胜或平的概率均为，乙队与丁队比赛，乙队胜、平、负的概率均为，且四个队之间比赛结果相互独立．

（Ⅰ）求选拔赛结束后，乙队与甲队并列第一名的概率；

（Ⅱ）设随机变量为选拔赛结束后乙队的积分，求随机变量的分布列与数学期望．

20.（本小题满分12分）如图所示，在等腰梯形中，，，，，平面，．

（Ⅰ）求证：平面；

（Ⅱ）若为线段上一点，且，是否存在实数，使平面与平面所成锐二面角为？若存在，求出实数；若不存在，请说明理由．

21.（本小题满分12分）

已知是焦距为的椭圆的右顶点，点，直线交椭圆于点，．

（Ⅰ）求椭圆的标准方程；

（Ⅱ）设过点且斜率为的直线与椭圆交于、两点（在、之间），若四边形的面积是面积的5倍，求直线的斜率.

22. （本小题满分12分）已知，既存在极大值，又存在极小值.

（Ⅰ）求实数的取值范围；

（Ⅱ）当时，分别为的极大值点和极小值点，且，求实数的取值范围.

**沧州一中高二年级第三次学段检测**

**数学参考答案及评分标准**

**一.选择题**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| D | C | A | B | C | B | A | C | ACD | ABD | BC | AB |

**三、填空题：**

13. 0.8 14.  15 . 48 16. 3

四、解答题：

17解：$(1)$命题*p*：$(x−a)(x−2a)<0得a<x<2a$，…………2分

当$a=1$时，得$1<x<2$，
$(2^{x}−16)(2^{x}−2)\leq 0$解得$2\leq 2^{x}\leq 16$，即$1\leq x\leq 4$，…………4分
所以当*p*，*q*都是真命题时，解得$1<x<2$，
故实数*x*的取值范围为$(1,2)$；………………………………7分
$(2)$命题*p*：$a<x<2a$，因为*p*是*q*的充分不必要条件，
所以$(a,2a)⫋[1$，$4]$，$\left\{\begin{matrix}a\geq 1\\2a\leq 4\end{matrix}\right.$，
解得$1\leq a\leq 2$，故实数*a*的取值范围为$[1,2]$．……………………10分

18.解：$(1)$当$x<0$时，$−x>0$，$f(−x)=2^{x}−\frac{−x+3}{3}$，
又$∵$函数$f(x)$是奇函数，
$∴f(−x)=−f(x)$，
$∴f(x)=−2^{x}−\frac{x−3}{3}$，
即……………………………………4分

在上单调递减………………………………………………6分
$(2)$由$f(t^{2}−2t)+f(2t^{2}−k)<0$得$f(t^{2}−2t)<−f(2t^{2}−k)=f(k−2t^{2})$，
由于$y=f\left(x\right)$是定义在上的减函数，
又$f(t^{2}−2t)<f(k−2t^{2})$，
$∴t^{2}−2t>k−2t^{2}$，即$3t^{2}−2t−k>0$恒成立，
即$k<3t^{2}−2t$对任意恒成立，
令$g(t)=3t^{2}−2t$，则$g(t)=3t^{2}−2t=3(t^{2}−\frac{2}{3}t)=3\left(t−\frac{1}{3}\right)^{2}−\frac{1}{3}\geq −\frac{1}{3}$，
$∴k<−\frac{1}{3}$，
故实数*k*的取值范围为$(−\infty ,−\frac{1}{3})$．…………………………………………12分

19.解：$(1)$设乙队胜、平、负丙队分别为事件$A\_{1},A\_{2},A\_{3}$，乙队胜、平、负丁队分别为事件$B\_{1},B\_{2},B\_{3}$，

则$P\left(A\_{1}\right)=P\left(A\_{2}\right)=\frac{1}{4}$，，$P\left(B\_{1}\right)=P\left(B\_{2}\right)=P\left(B\_{3}\right)=\frac{1}{3}$，

设事件*C*为“选拔赛结束后，乙队与丙队并列第一名”

由目前比赛积分榜可知，甲队一定是第一名，所以“乙队与甲队并列第一名”，

即乙队的积分为7分，即乙队胜丙队和丁对，

所以$P\left(C\right)=P\left(A\_{1}\right)P\left(B\_{1}\right)=\frac{1}{4}×\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$．…………………………………………4分

$(2)$随机变量*X*的所有可能取值为1，2，3，4，5，7

$P\left(X=1\right)=P\left(A\_{3}\right)P\left(B\_{3}\right)=\frac{1}{2}×\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ ；

$$P(X=2)=P(A\_{2})P(B\_{3})+P(A\_{3})P(B\_{2})=\frac{1}{4}×\frac{1}{3}+\frac{1}{2}×\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

$P\left(X=3\right)=P\left(A\_{2}\right)P\left(B\_{2}\right)=\frac{1}{4}×\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$；

；

；

$P\left(X=7\right)=P\left(A\_{1}\right)P\left(B\_{1}\right)=\frac{1}{4}×\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$；

随机变量*X*的分布列为：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| *P* | $$\frac{1}{6}$$ | $$\frac{1}{4}$$ | $$\frac{1}{12}$$ | $$\frac{1}{4}$$ | $$\frac{1}{6}$$ | $$\frac{1}{12}$$ |

………………………………………………………………………………10分

所以$E\left(X\right)=1×\frac{1}{6}+2×\frac{1}{4}+3×\frac{1}{12}+4×\frac{1}{4}+5×\frac{1}{6}+7×\frac{1}{12}=\frac{10}{3}$．………………12分

20.证明：$(1)$证明：因为$AE//CF$，$AE=CF$，
所以四边形*ACFE*为平行四边形，所以$AC//EF$．

在等腰梯形*ABCD*中，$∠DAB=60^{∘}$，
所以$AB=2BC$，所以$AC⊥BC$．
又$CF⊥$平面*ABCD*，所以
*BC*，$CF⊂$平面*BCF*，
所以$AC⊥$平面*BCF*．
因为$AC//EF$，所以$EF⊥$平面*BCF*；…………………………6分
$(2)$解：依题意，以*C*为坐标原点，分别以直线$CA,  CB,  CF$为*x*轴、*y*轴、*z*轴建立如图所示的空间直角坐标系，
所以
设
所以 
设$\vec{n\_{1}}=(x,  y,  z)$为平面*MAB*的法向量，
由$\left\{\begin{matrix}&\vec{n\_{1}} ⋅ \vec{AB}=0,  \\&\vec{n\_{1}} ⋅ \vec{BM}=0,  \end{matrix}\right.$得$\left\{\begin{matrix}&−\sqrt{3}x+y=0,  \\&\sqrt{3}λx−y+z=0,  \end{matrix}\right.$
取$x=1$，所以
因为$\vec{n\_{2}}=(0,  0,  1)$是平面*ABC*的一个法向量，
设平面*MAB*与平面*ABC*所成的锐二面角为$θ$，
所以$cosθ=\frac{|\vec{n\_{1}} ⋅ \vec{n\_{2}}|}{|\vec{n\_{1}}||\vec{n\_{2}}|}=\frac{|\sqrt{3}−\sqrt{3}λ|}{\sqrt{1+3+(\sqrt{3}−\sqrt{3}λ)^{2}}}=\frac{1}{2}$．
因为$0\leq λ\leq 1$，所以$λ=\frac{1}{3}$，所以
所以存在$λ=\frac{FM}{EF}=\frac{1}{3}$使平面*MAB*与平面*ABC*所成锐二面角为$\frac{π}{3}$．………………12分

21.解：$(1)∵$焦距为$2\sqrt{5}$，$\vec{PB}=\vec{BA}$，$∴2c=2\sqrt{5}$，且点*B*为线段*AP*的中点．

$∵$点$P(0,2\sqrt{3})$，$A(a,0)$，
$∴PA=2PB$，$B(\frac{a}{2},\sqrt{3}).$由题意得$c=\sqrt{5}$，

且$\frac{a^{2}}{4a^{2}}+\frac{3}{b^{2}}=1.①$又$a^{2}=b^{2}+c^{2}$，即$a^{2}=b^{2}+5.②$
联立$①②$解得$b^{2}=4$，$a^{2}=9.∴$椭圆*E*的方程为$\frac{x^{2}}{9}+\frac{y^{2}}{4}=1$．……………………4分
$(2)$由题意，得$S\_{△PAN}=6S\_{△PBM}$，即，
$∴|PN|=3|PM|$，即$\vec{PN}=3\vec{PM}.$设$M(x\_{1},y\_{1})$，$N(x\_{1},y\_{2})$，
则$\vec{PM}=(x\_{1},y\_{1}−2\sqrt{3})$，$\vec{PN}=(x\_{x},y\_{2}−2\sqrt{3})$，

$∴(x\_{2},y\_{2}−2\sqrt{3})=3(x\_{1},y\_{1}−2\sqrt{3})∴x\_{2}=3x\_{1}$，
即$\frac{x\_{2}}{x\_{1}}=3.$于是$\frac{x\_{2}}{x\_{1}}+\frac{x\_{1}}{x\_{2}}=\frac{10}{3}$，即$\frac{(x\_{1}+x\_{2})^{2}}{x\_{1}x\_{2}}=\frac{16}{3}.①$

联立$\{\begin{matrix}y=kx+2\sqrt{3}\\\frac{x^{2}}{9}+\frac{y^{2}}{4}=1\end{matrix}$消去*y*，整理得$(9k^{2}+4)x^{2}+36\sqrt{3}kx+72=0.$

由，解得$k^{2}>\frac{8}{9}.$

$∴x\_{1}+x\_{2}=−\frac{36\sqrt{3}k}{9k^{2}+4}$，$x\_{1}x\_{2}=\frac{72}{9k^{2}+4}.$代入$①$，可解得$k^{2}=\frac{32}{9}$，
满足$k^{2}>\frac{8}{9}$，$∴k=\pm \frac{4\sqrt{2}}{3}.$即直线*l*的斜率$k=\pm \frac{4\sqrt{2}}{3}$．………………………………12分

22.解：$(1)$由$f\left(x\right)=ae^{x}−e^{−x}−\left(a+1\right)x$
得$f′\left(x\right)=ae^{x}+e^{−x}−\left(a+1\right)$，
即$f′\left(x\right)=e^{−x}\left(e^{x}−1\right)\left(ae^{x}−1\right)$，
由题意，若$f(x)$存在极大值和极小值，
则$f′\left(x\right)=0$必有两个不相等的实数根，
由$e^{x}−1=0$得$x=0$，所以$ae^{x}−1=0$必有一个非零实数根，
$∴a\ne 0$，$e^{x}=\frac{1}{a}$，$∴\frac{1}{a}>0$且$\frac{1}{a}\ne 1$，
$∴0<a<1$或$a>1$．
综上，实数*a*的取值范围为．…………………………4分
$(2)$当$0<a<1$时，由$(1)$可知$f\left(x\right)$的极大值点为$x\_{1}=0$，
极小值点为$x\_{2}=−lna$，此时$f\left(x\_{1}\right)=a−1$，
$f\left(x\_{2}\right)=1−a+\left(a+1\right)lna$，
依题意得$a−1+k\left(1−a+\left(a+1\right)lna\right)>0$对任意$0<a<1$恒成立，
由于此时$f\left(x\_{2}\right)<f\left(x\_{1}\right)<0$，所以$k<0$；
所以$k\left(a+1\right)lna>\left(a−1\right)\left(k−1\right)$，
即$lna<\left(1−\frac{1}{k}\right)\frac{a−1}{a+1}$，
设$g\left(x\right)=lnx−\left(1−\frac{1}{k}\right)\frac{x−1}{x+1}$，$x\in \left(0,1\right)$，

则$g′\left(x\right)=\frac{1}{x}−\left(1−\frac{1}{k}\right)\frac{2}{\left(x+1\right)^{2}}=\frac{\left(x+1\right)^{2}−2x\left(1−\frac{1}{k}\right)}{x\left(x+1\right)^{2}}=\frac{x^{2}+\frac{2}{k}x+1}{x\left(x+1\right)^{2}}$，
令$x^{2}+\frac{2}{k}x+1=0(∗)$，判别式$Δ=\frac{4}{k^{2}}−4$．
$①$当$k\leq −1$时，$Δ\leq 0$，
所以$g′\left(x\right)\geq 0$，$g\left(x\right)$在$(0,1)$单调递增，
所以$g\left(x\right)<g\left(1\right)=0$，
即$lna<\left(1−\frac{1}{k}\right)\frac{a−1}{a+1}$，符合题意；
$②$当$−1<k<0$时，$Δ>0$，
设$(∗)$的两根为$x\_{3}$，$x\_{4}$，且$x\_{3}<x\_{4}$，
则$x\_{3}+x\_{4}=−\frac{2}{k}>0$，$x\_{3}x\_{4}=1$，因此$0<x\_{3}<1<x\_{4}$，
则当$x\_{3}<x<1$时，$g′\left(x\right)<0$，
$g(x)$在$(x\_{3},1)$单调递减，
所以当$x\_{3}<a<1$时，$g(a)>g(1)=0$，
即$lna>\left(1−\frac{1}{k}\right)\frac{a−1}{a+1}$，
所以$f\left(x\_{1}\right)+kf\left(x\_{2}\right)<0$，矛盾，不合题意；
综上，*k*的取值范围是$k\leq −1$．……………………………………………………12分