

**河婆中学2020-2021学年第二学期高一期中考试**

数学科试卷

一、单项选择题（本大题共**8**小题，共**40.0**分）

1. 集合，，那么

A. B.   
C. D.

1. 复数为虚数单位等于

A. B. C. D.

1. 已知是第二象限角，，则

A. B. C. D.

1. 已知，则“”是“”的    条件

A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

1. 定义在*R*上的偶函数在上单调递减，若，，，则*a*，*b*，*c*的大小关系是

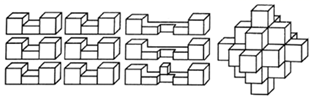
A. B. C. D.

1. 已知向量，，且与的夹角为锐角，则实数*k*的取值范围是

A. B. C. D.

1. 鲁班锁是中国古代传统土木建筑中常用的固定结合器，也是广泛流传于中国民间的智力玩具，它起源于古代中国建筑首创的榫卯结构．这种三维的拼插器具内部的凹凸部分即榫卯结构啮合，外观看上去是严丝合缝的十字几何体，其上下、左右、前后完全对称，十分巧妙．鲁班锁的种类各式各样，其中以最常见的六根和九根的鲁班锁最为著名．九根的鲁班锁由如图所示的九根木榫拼成，每根木榫都是由一根正四棱柱状的木条挖一些凹槽而成．若九根正四棱柱底面边长均为1，其中六根最短条的高均为3，三根长条的高均为5，现将拼好的鲁班锁放进一个球形容器内，使鲁班锁最高的三个正四棱柱形木榫的上、下底面顶点分别在球面上，则该球形容器的表面积容器壁的厚度忽略不计的最小值为

A. B. C. D.



1. 对于函数，若存在，使，则称点与点是函数的一对“隐对称点”若函数的图象存在“隐对称点”，则实数*m*的取值范围是

A. B. C. D.

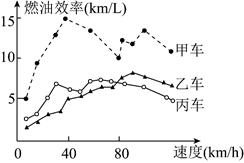
二、多项选择题（本大题共**4**小题，共**20.0**分）

1. 下列叙述中，正确的是

A. 若，，，，则  
B. 若，，则  
C. 若*A*，*B*，，*A*，*B*，，则，重合  
D. 若，，，，则

1. 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗1升汽油行驶的里程．如图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下燃油效率情况，下列叙述中正确的是

A. 消耗1升汽油，乙车最多可行驶5千米  
B. 以相同速度行驶相同路程，三辆车中甲车消耗汽油最少  
C. 甲车以80千米小时的速度行驶1小时，消耗10升汽油  
D. 某城市机动车最高限速80千米小时，相同条件下，在该市用丙车比用乙车更省油



1. 定义两个非零平面向量的一种新运算，其中表示的夹角，则对于两个非零平面向量，下列结论一定成立的有

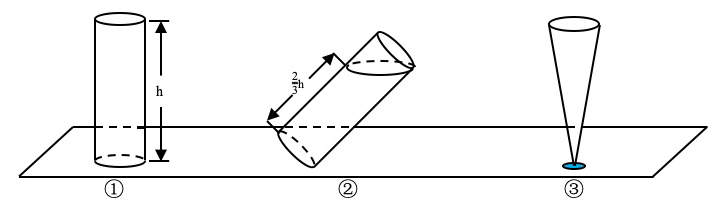
A. 在方向上的投影为 B.   
C.   D. 若，则与平行

1. 已知函数是定义在上的奇函数，当时，，则下列说法正确的是

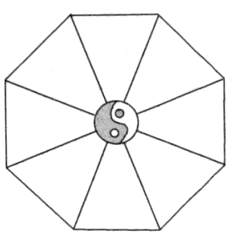
A. 函数有2个零点 B. 当时，  
C. 不等式的解集是 D. ，，都有

三、填空题（本大题共**4**小题，共**20.0**分）

1. 计算：\_\_\_\_\_\_．
2. 已知，则 \_\_\_\_\_\_ ．
3. 已知一个高为*h*的圆柱形水杯装满水，如图，现将水杯向右倾斜，如图，此时水杯中剩余的水占水杯容积的比值为\_\_\_\_\_\_\_，将水杯中剩余的水倒满与圆柱形水杯同底等高的圆锥形杯子，如图，则此时圆柱形杯子中的水占水杯容积的比值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。不计水杯玻璃厚度

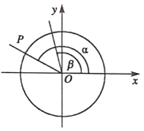


1. 易经是阐述天地世间关于万象变化的古老经典，如图是易经中记载的几何图形八卦图．图中正八边形代表八卦，中间的圆代表阴阳太极图，其余八块面积相等的图形代表八卦田．已知正八边形的边长为8*m*，代表阴阳太极图的圆的半径为2*m*，则每块八卦田的面积约为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_结果保留整数．



四、解答题（本大题共**6**小题，共**70.0**分）

1. 如图，以*x*轴非负半轴为始边，角的终边与单位圆相交于点，将角的终边绕着原点*O*顺时针旋转得到角．  
   求的值；  
   求的值．

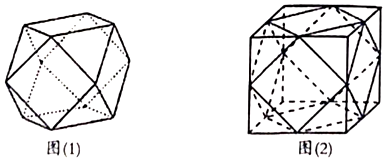


|  |
| --- |
|  |

1. 已知的内角*A*、*B*、*C*所对的边分别为*a*，*b*，向量与平行．

Ⅰ求*A*；Ⅱ若，的面积为，求的周长．

1. 已知函数，且．  
   判断的奇偶性，并证明你的结论；  
   若恒成立，求*m*的最大值．
2. 某广场设置了一些多面体形或球形的石凳供市民休息如图的多面体石凳是由图的正方体石块截去八个相同的四面体得到，且该石凳的体积是．  
     
   求正方体石块的棱长；  
   若将图的正方体石块打磨成一个球形的石凳，求此球形石凳的最大体积．



1. 已知函数．  
   求函数的最小正周期和单调增区间；  
   求函数在区间上的最小值以及取得该最小值时*x*的值．
2. 我们知道，函数的图象关于坐标原点成中心对称的充要条件是函数为奇函数，有同学发现可以将其推广为：函数的图象关于点成中心对称的充要条件是函数为奇函数．  
   Ⅰ若，  
   求此函数图象的对称中心；  
   求的值．  
   Ⅱ类比上述推广结论，写出“函数的图象关于*y*轴成轴对称的充要条件是函数为偶函数”的一个推广结论．

**河婆中学2020-2021学年第二学期高一期中考试**

答案和解析

**【答案】**

1. *A* 2. *A* 3. *A* 4. *B* 5. *A* 6. *C* 7. *D*  
8. *B* 9. *AD* 10. *BD* 11. *BD* 12. *BCD*

13. 2   14. 1   15. ；   16. 37

17. 解：由题意可得，，，  
可得．  
由题意可得，可得，  
所以

．

18. 解：Ⅰ，  
∴ a{\rm \sin }B- \sqrt{3}b{\rm \cos }A=0，  
由正弦定理得{\rm \sin }A{\rm \sin }B- \sqrt{3}{\rm \sin }B{\rm \cos }A=0，  
又从而{\rm \tan }A= \sqrt{3}，  
由于0 < A < {\rm π}，所以A= \dfrac{{\rm π}}{3}．  
Ⅱ由题意得：S= \dfrac{1}{2}bc{\rm \sin }A= \dfrac{3 \sqrt{3}}{2}，  
又A= \dfrac{{\rm π}}{3}，，  
又，由余弦定理得  
{b}^{2}+{c}^{2}-2bc{\rm \cos }A={a}^{2}=7，  
整理得，  
，，  
故的周长为．

19. 解：由，解得，故，  
证明：为定义域在*R*上的奇函数，证明如下：  
，  
即，所以为奇函数；  
由条件得，即恒成立，  
设，则，  
当且仅当时，等号成立  
所以的最小值是，所以  
即*m*的最大值是．

20. 解：设正方体石块的棱长为，  
则每个截去的四面体的体积为．  
由题意可得，解得．  
故正方体石块的棱长为4*dm*；  
当球形石凳的面与正方体的各个面都相切时球形石凳的体积最大．  
此时正方体的棱长正好是球的直径，  
球形石凳的最大体积．

21. 解：因为函数  
；  
函数最小正周期是；  
当，，  
即，，  
函数单调递增区间为，；  
；  
所以当时，即时，取得最小值0．

22. 解：Ⅰ函数图象的对称中心为，  
因为奇函数，  
故，  
故，  
则，  
即，  
整理得，  
故，解得，，  
所以函数图象的对称中心为．  
因为函数图象的对称中心为，  
所以，  
故  
．  
Ⅱ推论：函数的图象关于直线成轴对称的充要条件是函数为偶函数．

**【解析】**

1. 【分析】  
本题考查集合的并集运算，属于基础题．  
直接求并集即可．  
【解答】  
解：集合，，  
所以．  
故选*A*．

2. 【分析】  
本题主要考查了复数的四则运算，属于基础题．  
【解答】  
解：，  
故选*A*．

3. 解：，  
，  
是第二象限角，  
，  
．  
故选：*A*．  
利用诱导公式化简已知可求，进而根据同角三角函数基本关系式即可计算求解．  
本题主要考查了诱导公式，同角三角函数基本关系式在三角函数化简求值中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题．

4. 【分析】  
本题考查充分条件、必要条件，属于基础题．  
先化简为或；即为，利用充分条件和必要条件的有关定义得到结论．  
【解答】  
解：*p*：即为或；  
*q*：即为；  
所以若*p*成立则*q*不一定成立，反之若*q*成立则*p*一定成立，  
所以*p*是*q*的必要不充分条件，  
故选：*B*．

5. 解：因为偶函数在上单调递减，  
故在上单调递增，  
，，，  
又，  
则．  
故选：*A*．  
根据函数奇偶性和单调性之间的关系，即可得到结论．  
本题主要考查函数值的大小比较，根据函数奇偶性和单调性之间的关系是解决本题的关键．

6. 【分析】  
本题主要考平面向量的夹角问题，考查推理能力和计算能力，属于基础题．  
设与 的夹角为，利用且 与不同向即可解答．  
【解答】  
解：设与 的夹角为，  
则由题意可得，且 与不同向，  
，且，解得，且，  
故*k*的取值范围是，  
故选*C*．

7. 解：由题意，设该几何体的外接球的半径为*R*，正四棱柱体的高为，  
用平行圆柱的底面的平面截圆柱和中间横向最长木条的截面图如图：  
则，可得，  
加好友的外接球的表面积为：．  
故选：*D*．  
由题意，求出球形容器的半径的最小值，即可求出正四棱柱体的体对角线的长度，得到外接球的半径．再求外接球的表面积．  
本题考查几何体的外接球的表面积，考查学生的计算能力，属于中档题．

8. 解：由隐对称点的定义可知函数图象上存在关于原点对称的点，设的图象与函数，的图象关于原点对称，  
令，则，，  
，  
故原题义等价于方程有零点，  
解得，  
又因，当且仅当时取等号，  
．  
故选：*B*．  
由隐对称点的定义可知函数图象上存在关于原点对称的点，进而可解出．  
本题考查了函数的性质，基本不等式，新概念的理解，属于基础题．

9. 【分析】

本题考查平面的基本性质，属于基础题．  
 根据平面的基本性质，对各选项逐一分析，即可得到答案．

【解答】

解：若，，，，  
根据平面性质的公理，可知正确，故*A*正确；  
*B*.，，*A*，*B*两点不一定是两个平面的公共点，故*B*错误；  
*C*.若*A*，*B*，，*A*，*B*，，  
当*A*，*B*，*C*在一条直线上时，则，不重合，故*C*错误；  
*D*.若，，，，  
则*A*，*B*两点是两个平面的公共点，  
根据平面性质的公理，得到，故*D*正确．  
故选*AD*．

10. 【分析】

本题考查了函数图象的识别，关键掌握题意，属于基础题．  
根据汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗1升汽油行驶的里程，以及图象，分别判断各个选项即可．

【解答】

解：对于选项*A*，从图中可以看出当乙车的行驶速度大于40千米每小时时的燃油效率大于5千米每升，故乙车消耗1升汽油的行驶路程远大于5千米，故*A*错误；  
对于选项*B*，以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最小，故*B*正确；  
对于选项*C*，甲车以80千米小时的速度行驶1小时，里程为80千米，燃油效率为10，故消耗8升汽油，故*C*错误；  
对于选项*D*，因为在速度低于80千米小时，丙的燃油效率高于乙的燃油效率，故*D*正确．  
故选*BD*．

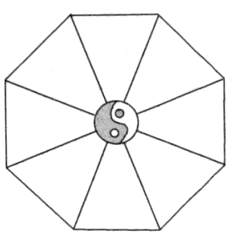
11. 【分析】  
本题考查向量的投影，平行向量，向量运算律，属于中档题．  
首先根据投影的定义判断出*A*是否正确，然后通过即可判断出*B*是否正确，通过取即可判断出*C*是否正确，通过计算得出即可判断出*D*是否正确并得出答案．  
【解答】  
解：由向量投影的定义可知，*A*显然不成立；  
，故*B*成立；  
，当时不成立，故*C*不成立；  
由，得，即两向量平行，故*D*成立．  
故选*BD*．

12. 解：函数是定义在上的奇函数，  
当时，，可得，，，  
所以函数有3个零点，故*A*错误；  
当时，，，则时，，故*B*正确；  
当时，由，解得，当时，由，解得或，此时无解，当时，，不满足不等式，  
所以的解集为，故*C*正确；  
当时，的最小值为，所以当时，的最大值为，  
即有在的值域为，则，故*D*正确．  
故选：*BCD*．  
由奇函数的定义可得的零点为0，，1，可判断*A*；由奇函数的定义可得时，，代入已知解析式可得的解析式，可判断*B*；讨论，，时，的解集，可判断*C*；分别求得在，的值域，可得的最值，可判断*D*．  
本题考查命题的真假判断，主要是函数的奇偶性和解析式的求法、最值的判断，考查转化思想和运算能力、推理能力，属于中档题．

13. 解：原式，  
故答案为：2．  
直接根据对数的运算性质和指数幂的运算性质即可求出．  
本题考查了对数的运算性质和指数幂的运算性质，属于基础题．

14. 解：根据题意，，  
，则，  
故答案为：1．  
根据题意，由函数的解析式可得的值，进而计算可得答案．  
本题考查分段函数函数值的计算，涉及指数、对数的计算，属于基础题．

15. 15【分析】  
本题考查圆柱与圆锥的体积，属基础题，根据倾斜后的上部无水部分的体积为相应圆柱的体积的一半，可得答案；根据圆锥的体积与圆柱的体积的关系可得第二个空的答案  
【解答】  
解：剩余水的体积占水杯容积的比值为，  
再倒满等底同高的圆锥中，倒出了圆柱的容积的三分之一，  
剩余为，  
故答案为；．

16. 【分析】  
本题考查正弦定理与三角形面积公式，涉及二倍角公式，属中档题．  
计算每个三角形顶角度数，利用正弦定理结合正八边形的边长求出腰长，进而利用三角形面积公式求面积即可．  
【解析】  
解：如图，易知每个三角形的顶角为，  
  
设三角形的腰长为*a*，  
由正弦定理可得，解得，  
所以每个三角形的面积为，  
所以每块八卦田的面积为．  
故答案为37．

17. 由题意利用任意角的三角函数的定义可求得，，的值，利用诱导公式化简所求即可得解．  
由题意可得，利用二倍角公式，两角差的余弦公式即可求解．  
本题主要考查了任意角的三角函数的定义，诱导公式，二倍角公式，两角差的余弦公式在三角函数化简求值中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题．

18. 本题主要考查了向量的平行关系与解三角形，通过余弦定理和正弦定理解答，属于中档题．  
Ⅰ利用向量平行得到坐标的等式，根据正弦定理转化，即可求出*A*；  
Ⅱ利用三角形面积公式求得，利用余弦定理得到关于*b*，*c*的等式，求出，即可求周长．

19. 求出*a*的值，根据函数的奇偶性的定义证明即可；  
问题转化为恒成立，设，则，得到当且仅当时，等号成立，从而求出*m*的最大值即可．  
本题考查了函数的奇偶性，考查函数恒成立问题，考查转化思想以及换元思想，是中档题．

20. 设正方体石块的棱长为*a*，求出每个截去的四面体的体积，再由等体积法列式求解*a*值；  
当球形石凳的面与正方体的各个面都相切时球形石凳的体积最大，可得正方体的棱长正好是球的直径，再由球的体积公式求解．  
本题考查多面体体积的求法，考查空间想象能力与运算求解能力，是中档题．

21. 函数解析式利用二倍角的余弦函数公式化简，整理后利用两角和与差的正弦函数公式化为一个角的正弦函数，找出的值，代入周期公式即可求出函数的最小正周期，根据正弦函数的单调性即可确定出的单调递增区间；  
由可得：，所以当时，即时，取得最小值0．  
本题主要考查了三角函数的图象和性质，以及三角函数求最值，是中档题．

22. Ⅰ设的对称中心为，利用题中给出的信息可得奇函数，从而得到，展开整理得到关于*a*和*b*方程，求解即可；  
利用中的结论，可得，然后将根据进行变形，即可得到答案．  
Ⅱ直接类比写出一个推论即可．  
本题考查了函数奇偶性的应用、对称性的应用，解题的关键是正确理解题意，属于中档题．